

BIÊN SOẠN TRẦN MINH CHÍNH

PHƯƠNG PHÁP TÍNH
DÙNG CHO SINH VIÊN NGÀNH CƠ KHÍ

ĐÀ NẴNG 2004

CHƯƠNG 1

SAI SỐ

1.1 SAI SỐ TUYỆT ĐỐI VÀ SAI SỐ TƯƠNG ĐỐI

1.1.1 Sai số tuyệt đối

Trong tính toán gần đúng chúng ta làm việc với các giá trị gần đúng của các đại lượng. Vì vậy vấn đề trước tiên là nghiên cứu sai số của các đại lượng gần đúng.

Xét đại lượng đúng A có giá trị gần đúng là a . Lúc đó ta nói " a xấp xỉ A " và viết là " $a \approx A$ ". Trị tuyệt đối $|a - A|$ gọi là *sai số tuyệt đối* của a (coi là giá trị gần đúng của A). Nói chung chúng ta không thể biết được số đúng A , nên không tính được sai số tuyệt đối của a . Do vậy ta phải tìm cách *ước lượng* sai số đó bằng số dương Δ_a nào đó lớn hơn hoặc bằng $|a - A|$:

$$|a - A| \leq \Delta_a \quad (1-1)$$

Số dương Δ_a này gọi là sai số tuyệt đối giới hạn của a . Rõ ràng nếu Δ_a đã là sai số tuyệt đối giới hạn của a thì mọi số $\Delta' > \Delta_a$ đều có thể xem là sai số tuyệt đối giới hạn của a . Vì vậy tùy điều kiện cụ thể người ta **chọn Δ_a là số dương bé nhất có thể được** thỏa mãn (1-1).

Nếu số xấp xỉ a của A có sai số giới hạn là Δ_a thì ta qui ước viết:

$$A = a \pm \Delta_a \quad (1-2)$$

Với nghĩa của (1-1) tức là:

$$a - \Delta_a \leq A \leq a + \Delta_a \quad (1-3)$$

1.1.2 Sai số tương đối

Tỷ số:

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|} \quad (1-4)$$

gọi là sai số tương đối giới hạn của a

$$\text{Ta suy ra:} \quad \Delta_a = |a| \delta_a \quad (1-5)$$

Các công thức (1-4) và (1-5) cho ta liên hệ giữa sai số tương đối và sai số tuyệt đối. Biết Δ_a thì (1-4) cho phép tính δ_a , biết δ_a thì (1-5) cho phép tính Δ_a .

Do (1-5) nên (1-2) cũng có thể viết:

$$A = a(1 \pm \delta_a) \quad (1-6)$$

Trong thực tế người ta xem Δ_a là sai số tuyệt đối và lúc đó δ_a cũng là sai số tương đối.

1.1.3 Chú thích

Sai số tuyệt đối không nói nên đầy đủ *chất lượng* của một số xấp xỉ, *chất lượng* ấy được phản ánh qua sai số tương đối. Lấy thí dụ : đo hai chiều dài A và B được $a = 10\text{m}$ với $\Delta_a = 0,05\text{m}$ và $b = 2\text{m}$ với $\Delta_b = 0,05\text{m}$. Rõ ràng phép đo A *chất lượng* hơn phép đo B. Điều đó không phản ánh qua sai số tuyệt đối vì chúng bằng nhau, mà phản ánh qua sai số tương đối :

$$\delta_a = \frac{0,05}{10} = 0,005 < \delta_b = \frac{0,05}{2} = 0,025$$

1.2 CÁCH VIẾT SỐ XẤP XỈ

1.2.1. Chữ số có nghĩa

Một số viết ở dạng thập phân có thể gồm nhiều chữ số, nhưng ta chỉ kể các chữ số từ chữ số khác 0 đầu tiên tính từ trái sang phải là *chữ số có nghĩa*. Chẳng hạn số 2,74 có ba chữ số có nghĩa, số 0,0207 cũng có ba chữ số có nghĩa.

1.2.2. Chữ số đáng tin

Mọi số thập phân đều có dạng :

$$a = \pm \sum \alpha_s 10^s \quad (1.7)$$

trong đó α_s là những số nguyên từ 0 đến 9, chẳng hạn số 76,809 được viết

$$76,809 = 7 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0 + 8 \cdot 10^{-1} + 0 \cdot 10^{-2} + 9 \cdot 10^{-3}$$

tức là có dạng (1.7) với :

$$\alpha_1 = 7, \alpha_2 = 6, \alpha_{-1} = 8, \alpha_{-2} = 0, \alpha_{-3} = 9$$

Giả sử a là giá trị xấp xỉ của A với sai số tuyệt đối giới hạn Δ_a , ta chú ý chữ số α_s . Nếu $\Delta_a \leq 0,5 \cdot 10^s$ thì nói α_s là *chữ số đáng tin*, nếu $\Delta_a \geq 0,5 \cdot 10^s$ thì nói α_s là *chữ số đáng nghi*.

Thí dụ : Cho $a = 56,78932$ với $\Delta_a = 0,0042$ thì các chữ số 5,6,7,8 là đáng tin còn các chữ số 9,3,2 là đáng nghi. Còn nếu $\Delta_a = 0,0075$ thì các chữ số 5,6,7 là đáng tin còn các chữ số 8,9,3,2 là đáng nghi.

Rõ ràng nếu α_s là đáng tin thì các chữ số bên trái nó cũng là đáng tin và nếu α_s là đáng nghi thì các chữ số bên phải nó cũng là đáng nghi.

1.2.3. Cách viết số xấp xỉ

Cho số a là giá trị xấp xỉ của A với sai số tuyệt đối giới hạn là Δ_a . Có hai cách viết số xấp xỉ a; cách thứ nhất là *viết kèm theo sai số* như ở công thức (1-2) hoặc (1-6). Cách thứ hai là viết theo qui ước : *mọi chữ số có nghĩa là đáng tin*. Một số viết theo cách thứ hai có nghĩa là nó có sai số tuyệt đối giới hạn *không lớn hơn một nửa đơn vị ở hàng cuối cùng*. Các bảng số cho sẵn như bảng logarit, v.v.. thường viết các số xấp xỉ theo qui ước này.

1.3. SAI SỐ QUI TRÒN

1.3.1 Hiện tượng qui tròn và sai số qui tròn

Trong tính toán khi gặp một số có quá nhiều chữ số đáng nghi người ta bỏ đi một vài chữ số ở cuối cho gọn, việc làm đó được coi là *qui tròn số*. Mỗi khi qui tròn một số thì tạo ra một sai số mới gọi là *sai số qui tròn* nó bằng hiệu giữa số đã qui tròn với số chưa qui tròn. Trị tuyệt đối của của hiệu đó gọi là *sai số qui tròn tuyệt đối*. Qui tắc qui tròn phải chọn sao cho *sai số qui tròn tuyệt đối càng bé càng tốt*, ta chọn qui tắc sau đây : *Qui tròn sao cho sai số qui tròn tuyệt đối không lớn hơn một nửa đơn vị ở hàng được giữ lại cuối cùng, tức là 5 đơn vị ở hàng bỏ đi đầu tiên, cụ thể là nếu chữ số ở hàng bỏ đi đầu tiên ≥ 5 thì thêm vào chữ số giữ lại cuối cùng một đơn vị, còn nếu chữ số bỏ đi đầu tiên < 5 thì để nguyên chữ số giữ lại cuối cùng*.

Thí dụ : số 56,78932 qui tròn đến số chữ số lẻ thập phân thứ ba (tức là giữ lại các chữ số từ đầu đến chữ số lẻ thập phân thứ ba) sẽ thành số 56,789; cũng số đó qui tròn đến số lẻ thập phân thứ hai sẽ là 56,79 và nếu qui tròn đến ba chữ số có nghĩa thì sẽ là 56,8.

1.3.2 Sai số của số đã quy tròn

Giả sử a là số xấp xỉ của số đúng A với sai số tuyệt đối giới hạn là Δ_a . Ta sẽ quy tròn a thành a' với sai số quy tròn tuyệt đối là $\theta_{a'}$, tức là :

$$|a' - a| \leq \theta_{a'} \quad (1 - 8)$$

Hãy tính sai số tuyệt đối giới hạn $\Delta_{a'}$ của a' . Ta có:

$$a' - A = a' - a + a - A$$

Do vậy :

$$|a' - a| \leq |a' - a| + |a - A| \leq \theta_{a'} + \Delta_a$$

Từ đó có thể lấy:

$$\Delta_{a'} = \Delta_a + \theta_{a'} \quad (1 - 9)$$

Rõ ràng $\Delta_{a'} > \Delta_a$ tức là việc quy tròn số làm tăng sai số tuyệt đối giới hạn.

1.3.3 Ảnh hưởng của sai số quy tròn

Xét một thí dụ sau đây:

Áp dụng công thức nhị thức Niuton ta có công thức đúng :

$$(\sqrt{2} - 1)^{10} = 3363 - 2378\sqrt{2} \quad (1 - 10)$$

Với $\sqrt{2} = 1,41421356...$

Bây giờ ta tính hai vế của (1-10) bằng cách thay $\sqrt{2}$ bởi các số quy tròn (xem bảng 1-1). Sự khác biệt giữa các giá trị tính ra của hai vế chứng tỏ sai số quy tròn có thể có những tác dụng rất đáng ngại trong quá trình tính toán.

Bảng 1-1

$\sqrt{2}$	Vế trái	Vế phải
1,4	0,0001048576	33,8
1,41	0,00013422659	10,02
1,414	0,000147912	0,508
1,41421	0,00014866399	0,00862
1,414213563	0,00014867678	0,0001472

1.4 CÁC QUY TẮC TÍNH SAI SỐ

1.4.1 Mở đầu

Xét hàm số u của hai biến số x và y :

$$u = f(x,y) \quad (1-11)$$

Đã biết sai số của x và y , hãy tính sai số của u .

Ở đây lưu ý $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_u$ là ký hiệu các gia số của x, y, u lại cũng là ký hiệu các sai số tuyệt đối của x, y, u . Theo định nghĩa (1-1) ta luôn có:

$$|\Delta_x| \leq \Delta_x; |\Delta_y| \leq \Delta_y \quad (1-12)$$

Ta phải tìm Δ_u để có $|\Delta_u| \leq \Delta_u$

1.4.2 Sai số của tổng $u = x + y$

Ta có $\Delta_u = \Delta_x + \Delta_y$ suy ra $|\Delta_u| = |\Delta_x| + |\Delta_y|$ do đó theo (1-12) ta có:

$$|\Delta_u| \leq \Delta_x + \Delta_y$$

Ta chọn $\Delta_{x+y} = \Delta_x + \Delta_y \quad (1-13)$

Để có $|\Delta_u| \leq \Delta_u$. Vậy có quy tắc sau:

Sai số tuyệt đối giới hạn của một tổng bằng tổng các sai số tuyệt đối giới hạn của các số hạng.

Chú ý : Xét trường hợp $u = x - y$ với x và y cùng dấu. Khi đó

$$\delta_u = \frac{\Delta_u}{|u|} = \frac{\Delta_x + \Delta_y}{|x - y|}$$

Cho nên nếu $|x - y|$ rất bé thì sai số tương đối giới hạn rất lớn. Do vậy trong quá trình tính toán ta phải tìm cách tránh phải trừ các số gần bằng nhau.

1.4.3 Sai số của tích $u = xy$

Ta có $\Delta_u \approx du = ydx + xdy \approx y\Delta_x + x\Delta_y$

$$|\Delta_u| \leq |y||\Delta_x| + |x||\Delta_y| \leq |y|\Delta_x + |x|\Delta_y$$

Ta suy ra : $|\Delta_u| = |y|\Delta_x + |x|\Delta_y$

$$\text{Do đó : } \delta_u = \frac{\Delta_u}{|u|} = \frac{|y|\Delta_x + |x|\Delta_y}{|xy|} = \frac{\Delta_x}{|x|} + \frac{\Delta_y}{|y|}$$

$$\text{Tức là có } \Delta_{xy} = \delta_x + \delta_y \quad (1-14)$$

Vậy ta có quy tắc :

Sai số tương đối giới hạn của một tích bằng tổng các sai số tương đối giới hạn của các thừa số của tích. Đặc biệt có:

$$\delta_x n = n \delta_y \text{ với } n \text{ nguyên dương.} \quad (1-15)$$

1.4.4 Sai số của một thương $u = x/y, y \neq 0$;

Tương tự như trường hợp tích ta có quy tắc:

Sai số tương đối của một thương bằng tổng các sai số tương đối của các số hạng:

$$\delta_{x/y} = \delta_x + \delta_y \quad (1-16)$$

1.4.5 Công thức tổng quát

Cho $u = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$

$$\text{Ta có} \quad \Delta_u = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta_{x_i} \quad (1-17)$$

Và từ đó ta suy ra δ_u theo định nghĩa (1.4).

Thí dụ : Tính sai số tuyệt đối giới hạn và sai số tương đối giới hạn của thể tích hình cầu:

$$V = \frac{1}{6} \pi d^3$$

nếu cho đường kính $d = 3,7 \pm 0,05$ cm và $\pi = 3,14$.

Giải : Xem π và d là đối số của hàm V , theo (1-14) và (1-15) ta có :

$$\delta_V = \delta_\pi + 3\delta_d$$

$$\delta_\pi = 0,0016/3,14 = 0,0005$$

$$\delta_d = 0,05/3,7 = 0,0135$$

Suy ra $\delta_V = 0,0005 + 3 \times 0,0135 = 0,04$

$$\text{Mặt khác: } V = \frac{1}{6} \pi d^3 = 26,5 \text{ cm}^3$$

$$\text{Vậy có} \quad \Delta_V = 26,5 \times 0,04 = 1,06 \approx 1,1 \text{ cm}^3$$

$$V = 26,5 \pm 1,1 \text{ cm}^3$$

1.5- SAI SỐ TÍNH TOÁN VÀ SAI SỐ PHƯƠNG PHÁP

1.5.1. Mở đầu

Khi giải gần đúng một bài toán phức tạp ta phải thay bài toán đã cho bằng một bài toán đơn giản hơn để có thể giải được bằng các phép toán thông thường hoặc nhờ máy tính điện tử. Phương pháp thay thế bài toán như vậy được gọi là *phương pháp gần đúng*. Sai số do thay đổi bài toán được gọi là *sai số phương pháp*. Khi

giải các bài toán đơn giản ta phải thực hiện các phép tính, trong quá trình tính toán ấy ta luôn phải quy tròn các kết quả trung gian. Sai số tạo ra bởi việc quy tròn gọi là *sai số tính toán*. Sai số thực sự của bài toán ban đầu là tổng hợp của hai loại sai số phương pháp và sai số tính toán.

1.5.2. Thí dụ

a/ Hãy tính tổng:

$$A = \frac{1}{1^3} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{6^3}.$$

Giải : A là tổng của 6 phân số. Ta có thể tính trực tiếp A mà không cần phải thay nó bằng một tổng đơn giản hơn. Vì vậy bài toán không có sai số phương pháp. Để tính A ta hãy thực hiện các phép chia đến ba chữ số lẻ thập phân và đánh giá các sai số quy tròn tương ứng:

$$\frac{1}{1^3} = \frac{1}{1} = 1,000 \quad \text{với } \theta_1 = 0$$

$$\frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0,125 \quad \theta_2 = 0$$

$$\frac{1}{3^3} = \frac{1}{27} = 0,037 \quad \theta_3 = 1.10^{-4}$$

$$\frac{1}{4^3} = \frac{1}{64} = 0,016 \quad \theta_4 = 4.10^{-4}$$

$$\frac{1}{5^3} = \frac{1}{125} = 0,008 \quad \theta_5 = 0$$

$$\frac{1}{6^3} = \frac{1}{216} = 0,125 \quad \theta_6 = 4.10^{-4}$$

Vậy $A \approx a = 1,000 - 0,125 + 0,037 - 0,016 + 0,008 - 0,005 = 0,899$

$$|A - a| =$$

$$|(\frac{1}{1^3} - 1) - (\frac{1}{2^3} - 0,125) + (\frac{1}{3^3} - 0,037) - (\frac{1}{4^3} - 0,016) + (\frac{1}{5^3} - 0,008) - (\frac{1}{6^3} - 0,005)|$$

Hay $|A - a| \leq$

$$|(\frac{1}{1^3} - 1) - (\frac{1}{2^3} - 0,125) + (\frac{1}{3^3} - 0,037) - (\frac{1}{4^3} - 0,016) + (\frac{1}{5^3} - 0,008) - (\frac{1}{6^3} - 0,005)| \leq$$

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 + \theta_6 = 9.10^{-4}$$

Do đó $a = 0,899$ là giá trị gần đúng của A với sai số tính toán là 9.10^{-4} ; ta viết :

$$A = 0,899 \pm 9.10^{-4} \quad (1-18)$$

b/ Hãy tính tổng dãy số sau:

$$B = \frac{1}{1^3} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n^3} + \dots$$

Với sai số tuyệt đối không vượt quá 5.10^{-3} .

Giải: Vế phải của B là một chuỗi đan dấu hội tụ. Do đó việc tính B là hợp lý. Nhưng vế phải là một tổng vô hạn các số hạng, ta không thể tính hết được. Vì vậy để tính B ta phải sử dụng phương pháp gần đúng, chẳng hạn ta chỉ tính B bằng tổng của n số hạng đầu:

$$B_n = \frac{1}{1^3} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n^3}$$

Bài toán tính B_n đơn giản hơn bài toán tính B. Lúc đó $|B - B_n|$ là sai số phương pháp, vấn đề là phải chọn n sao cho tổng sai số phương pháp cộng với sai số tính toán phải nhỏ hơn $5 \cdot 10^{-3}$.

Theo lý thuyết về chuỗi đan dấu, ta có:

$$|B - B_n| = \left| \frac{1}{(n+1)^3} - \frac{1}{(n+2)^3} + \dots \right| < \frac{1}{(n+1)^3}$$

Nếu ta chọn $n = 6$ thì thấy :

$$|B - B_n| < \frac{1}{7^3} = \frac{1}{343} < 3 \cdot 10^{-3}$$

Chú ý rằng $B_6 = A$ ta đã tính ở thí dụ trên (xem (1-18)).

$$B_6 = A = 0,899 \pm 9 \cdot 10^{-4}$$

Vậy ta có:

$$B - 0,899 = B - B_6 + A - 0,899$$

$$|B - 0,899| \leq |B - B_6| + |A - 0,899|$$

$$|B - 0,899| \leq 3 \cdot 10^{-3} + 9 \cdot 10^{-4} < 4 \cdot 10^{-3}$$

Vậy ta đã tính được $B \approx 0,899$ với sai số tuyệt đối không vượt quá $4 \cdot 10^{-3}$:

$$B = 0,899 \pm 4 \cdot 10^{-3}$$

Chú ý : Trong sai số tổng hợp cuối cùng có phần của sai số phương pháp và có phần của sai số tính toán, nên ta phải phân bố hợp lý sao cho sai số cuối cùng nhỏ hơn sai số cho phép.

1.6. SỰ ỔN ĐỊNH CỦA MỘT QUÁ TRÌNH TÍNH

Xét một quá trình tính vô hạn để tính một đại lượng nào đó. Ta nói quá trình tính là *ổn định* nếu sai số tính toán tức là các sai số quy tròn tích lũy lại không tăng vô hạn; Nếu sai số đó tăng vô hạn thì ta nói quá trình tính là không ổn định.

Như vậy nếu quá trình tính là không ổn định thì không có hy vọng tính được đại lượng cần tính với sai số nhỏ hơn sai số cho phép. Để kiểm tra tính ổn định của một quá trình tính thường người ta giả sử sai số chỉ xảy ra tại một bước, sau đó các phép tính đều làm đúng không có sai số, nếu cuối cùng sai số tính toán không tăng vô hạn thì xem như quá trình tính là ổn định. Trong thực tế, mặc dù quá trình tính là vô hạn mà ta cũng chỉ làm một số hữu hạn bước, nhưng vẫn

phải đòi hỏi quá trình tính ổn định mới hy vọng với một số hữu hạn bước có thể đạt được mức độ chính xác mong muốn.

BÀI TẬP

1) Khi đo một góc ta được các giá trị sau :

$$a = 21^{\circ}37'3''; \quad b = 1^{\circ}10''$$

Hãy tính sai số tương đối của các số xấp xỉ đó biết rằng sai số tuyệt đối trong các phép đo là 1° .

2) Cho $a = 10,00 \pm 0,05$, $b = 0,0356 \pm 0,0002$, $c = 15300 \pm 100$,
 $d = 62000 \pm 500$ Tìm sai số tuyệt đối của $S_1 = a + b + c + d$; $S_2 = a + 5c - d$.
 $S_3 = c^3$.

3) Hãy xác định các chữ số đáng tin của số a biết sai số tương đối của nó :

$$* a = 1,8921 \quad \delta a = 0,001$$

$$* a = 22,351 \quad \delta a = 0,1$$

4) Hãy xác định các chữ số đáng tin của số a biết sai số tuyệt đối của nó :

$$* a = 0,3941 \quad \Delta a = 0,0025$$

$$* a = 38,2543 \quad \Delta a = 0,0027$$

5) Hãy quy tròn các số đứng dưới đây với ba chữ số có nghĩa đáng tin rồi xác định sai số tuyệt đối và sai số tương đối của chúng

$$* 2,1514$$

$$* 0,16152$$

$$* 0,01204$$

$$* -0,0015281$$

CHƯƠNG 2

TÍNH GẦN ĐÚNG NGHIỆM THỰC CỦA MỘT PHƯƠNG TRÌNH

2.1. NGHIỆM VÀ KHOẢNG PHÂN LY NGHIỆM

2.1.1 Nghiệm thực của phương trình một ẩn

Xét phương trình một ẩn

$$f(x) = 0 \quad (2-1)$$

trong đó f là hàm số cho trước của đối số x .

Nghiệm thực của phương trình (2-1) là số thực α thỏa mãn (2-1) tức là khi thay x bởi α ở vế trái ta được:

$$f(\alpha) = 0 \quad (2-2)$$

2.1.2 Ý nghĩa hình học của nghiệm

Ta vẽ đồ thị của hàm số $y = f(x)$ (2-3)

trong một hệ tọa độ vuông góc Oxy

(hình 2.1). Giả sử đồ thị cắt trục hoành

tại một điểm M thì điểm M này có tung

độ $y = 0$ và hoành độ $x = \alpha$. Thay chúng

vào (2-3) ta được

$$0 = f(\alpha) \quad (2-4)$$

Vậy hoành độ α của giao điểm M chính là một nghiệm của (2-1).

Trước khi vẽ đồ thị ta cũng có thể thay thế phương trình (2-1) bằng phương trình tương đương $g(x) = h(x)$ (2-5) rồi

vẽ đồ thị của hai hàm số (hình 2-2)

$$y = g(x)$$

$$y = h(x) \quad (2-6)$$

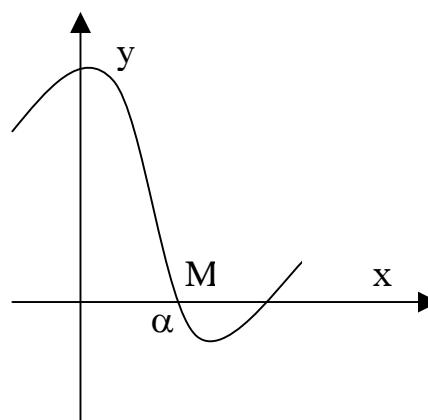
Giả sử hai đồ thị ấy cắt nhau tại M

Có hoành độ $x = \alpha$ thì ta có:

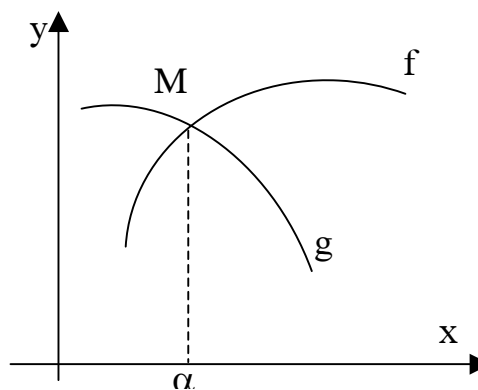
$$g(\alpha) = h(\alpha) \quad (2-7)$$

Vậy hoành độ α của giao điểm M

của hai đồ thị (2-6) chính là một nghiệm của (2-5) tức là của (2-1).



Hình 2.1



Hình 2-2

2.1.3. Sự tồn tại nghiệm thực của phương trình (2.1)

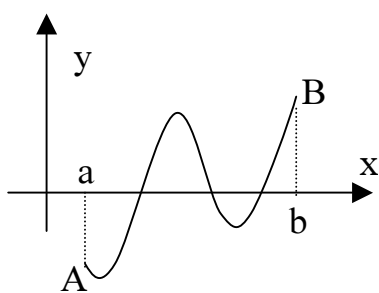
Trước khi tìm cách tính gần đúng nghiệm thực của phương trình (2.1) ta phải xét xem phương trình có nghiệm hay không. Có nhiều cách để biết nghiệm

có tồn tại hay không, chẳng hạn như vẽ đồ thị, khảo sát hàm.. Ta cũng có thể sử dụng định lý sau đây:

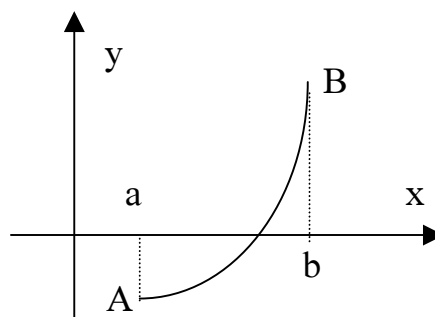
Định lý 1: Nếu có hai số thực a và b ($a < b$) sao cho $f(a)$ và $f(b)$ trái dấu tức là: $f(a).f(b) < 0$ (2-8); đồng thời $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$ thì ở trong khoảng $[a,b]$ có ít nhất một nghiệm thực của phương trình (2-1).

Điều này có thể minh họa trên đồ thị (hình 2-3).

Đồ thị của $y = f(x)$ tại $a \leq x \leq b$ là một đường liên nối hai điểm A và B , A ở phía dưới B ở phía trên trục hoành nên phải cắt trục hoành ít nhất một điểm ở trong khoảng từ a đến b . Vậy phương trình (2-1) có ít nhất một nghiệm ở trong khoảng $[a,b]$.



Hình 2-3



Hình 2-4

2-1-4. Khoảng phân ly nghiệm (Khoảng tách nghiệm)

Định nghĩa: Khoảng $[a,b]$ nào đó gọi là khoảng phân ly nghiệm của phương trình (2-1) nếu nó chứa một và chỉ một nghiệm của phương trình đó.

Để tìm khoảng phân ly nghiệm ta có thể dùng các định lý sau.

Định lý 2: Nếu $[a,b]$ là một khoảng trong đó hàm số $f(x)$ liên tục và đơn điệu, đồng thời $f(a)$ và $f(b)$ trái dấu, tức là có (2-8) thì $[a,b]$ là một khoảng phân ly nghiệm của phương trình (2-1). Điều này có thể minh họa trên đồ thị (H. 2-4). Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại một và chỉ một điểm ở trong $[a,b]$. Vậy $[a,b]$ chứa một và chỉ một nghiệm của của phương trình (2-1).

Nếu $f(x)$ có đạo hàm thì điều kiện đơn điệu có thể thay bằng điều kiện không đổi dấu của đạo hàm vì đạo hàm không đổi dấu thì hàm số đơn điệu.

Định lý 3: Nếu $[a,b]$ là một khoảng trong đó hàm $f(x)$ liên tục, đạo hàm $f'(x)$ không đổi dấu và $f(a)$, $f(b)$ trái dấu thì $[a,b]$ là một khoảng phân ly nghiệm của phương trình (2-1).

Muốn tìm các khoảng phân ly nghiệm người ta thường khảo sát sự biến thiên của hàm số rồi áp dụng định lý 3.

2-1-5. Thí dụ

Cho phương trình:

$$f(x) = x^3 - x - 1 = 0 \quad (2-9)$$

Hãy chứng tỏ phương trình trên có nghiệm thực và tìm khoảng phân ly nghiệm.

Giải: Trước hết ta xét sự biến thiên của hàm số $f(x)$, nó xác định và liên tục tại mọi x , đồng thời: $f'(x) = 3x^2 - 1 = 0$ tại $x = \pm 1/3^{1/2}$

Ta suy ra bảng biến thiên :

x	$-\infty$	$-1/3^{\frac{1}{2}}$	$+1/3^{\frac{1}{2}}$	$+\infty$			
f(x)	+	0	-	0	+		
f(x)	$-\infty$		M		m		$+\infty$

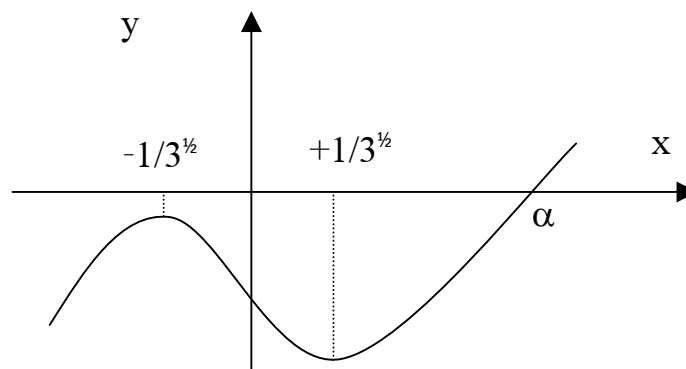
Trong đó $M = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - 1 < 0$

Vậy đồ thị cắt trục hoành tại một điểm duy nhất (Hình 2-5) do đó phương trình (2-9) có một nghiệm thực duy nhất, ký hiệu nó là α . Ta tính thêm:

$$f(1) = 1^3 - 1 - 1 < 0 \quad \text{và} \quad f(2) = 2^3 - 2 - 1 > 0$$

Vậy khoảng $[1,2]$ chứa nghiệm thực duy nhất của phương trình (2-9).

Như vậy phương trình (2-9) có một nghiệm thực duy nhất α nằm trong khoảng phân ly nghiệm $[1,2]$.



2-2 PHƯƠNG PHÁP CHIA ĐÔI

2-2-1. Nội dung phương pháp

Xét phương trình (2-1) với giả thiết nó có nghiệm thực α phân ly ở trong khoảng $[a,b]$. Ta tìm cách thu nhỏ dần khoảng phân ly nghiệm bằng cách chia đôi liên tiếp các khoảng phân ly nghiệm đã tìm ra. Trước hết ta chia đôi $[a,b]$ điểm chia là $c = (a+b)/2$. Rõ ràng khoảng phân ly nghiệm mới sẽ là $[a,c]$ hay $[c,b]$. Ta tính

$f(c)$, nếu $f(c) = 0$ thì c chính là nghiệm đúng α . Nếu $f(c) \neq 0$, lúc đó ta so sánh dấu của $f(c)$ với dấu của $f(a)$ để chọn khoảng phân ly nghiệm mới:

Nếu $f(c)$ trái dấu với $f(a)$ thì khoảng phân ly nghiệm mới là $[a, c]$.

Nếu $f(c)$ cùng dấu với $f(a)$ thì khoảng phân ly nghiệm mới là $[c, b]$.

Lúc này ta có khoảng phân ly nghiệm mới chỉ nhỏ bằng nửa khoảng phân ly nghiệm ban đầu, và ký hiệu là $[a_1, b_1]$. Ta lại tiếp tục như vậy cho khoảng phân ly nghiệm mới $[a_1, b_1]$ cho đến lần thứ n ta được khoảng phân ly $[a_n, b_n]$ nó nằm trong $[a, b]$ và chỉ dài bằng $1/2^n$ của $[a, b]$. Theo định nghĩa ta có:

$$a_n \leq \alpha \leq b_n \quad ; \quad b_n - a_n = \frac{(b-a)}{2^n}.$$

Vậy có thể lấy a_n làm giá trị gần đúng của α , lúc đó sai số là:

$$|\alpha - a_n| \leq b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \quad (2-10)$$

cũng có thể lấy b_n làm nghiệm gần đúng của α , lúc đó sai số là :

$$|\alpha - b_n| \leq b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \quad (2-11)$$

Do đó với n đủ lớn a_n hay b_n đều đủ gần với α . Khi $n \rightarrow \infty$ thì $a_n \rightarrow \alpha$, $b_n \rightarrow \alpha$ nên ta nói phương pháp chia đôi hội tụ.

Chú ý: Trong quá trình chia đôi liên tiếp, có thể gặp điểm chia mà tại đó f bằng không. Khi đó ta có điểm chia chính là nghiệm đúng của $f(x)$.

2.2.2 Thử dụ

Xét phương trình (2-9), ta đã chứng tỏ nó có khoảng phân ly nghiệm $[1, 2]$ và có $f(1) < 0$, $f(2) > 0$. Ta chia đôi khoảng $[1, 2]$ điểm chia là $3/2$.

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3}{2} - 1 > 0 \text{ trái dấu với } f(1) \text{ vậy } \alpha \in [1, 3/2].$$

Ta chia đôi khoảng $[1, 3/2]$, điểm chia là $5/4$ ta có $f(5/4) < 0$ cùng dấu với $f(1)$, vậy $\alpha \in [5/4, 3/2]$.

Ta chia đôi khoảng $[5/4, 3/2]$, điểm chia là $11/8$. Ta có $f(11/8) > 0$ trái dấu với $f(5/4)$, vậy $\alpha \in [5/4, 11/8]$.

Ta chia đôi khoảng $[5/4, 11/8]$, điểm chia là $21/16$. Ta có $f(21/16) < 0$ cùng dấu với $f(5/4)$, vậy $\alpha \in [21/16, 11/8]$.

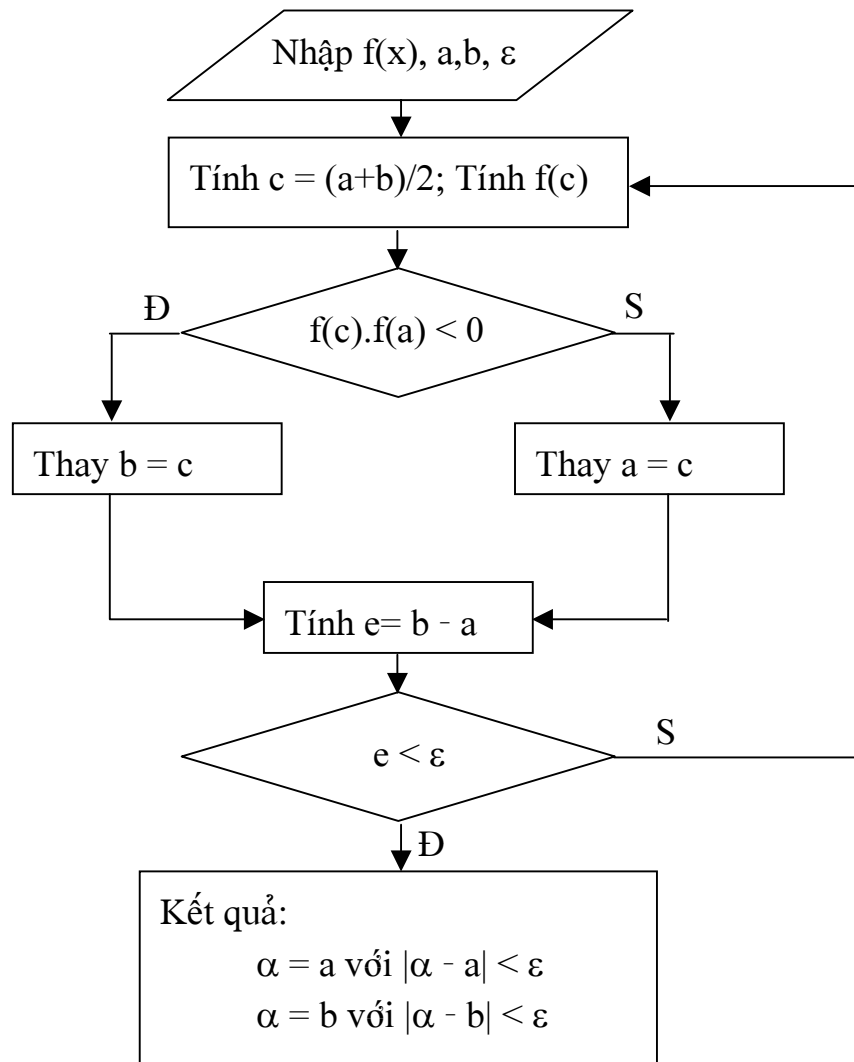
Ta chia đôi khoảng $[21/16, 11/8]$, điểm chia là $43/32$. Ta có $f(43/32) > 0$ trái dấu với $f(21/16)$, vậy $\alpha \in [21/16, 43/32]$.

Ta dừng quá trình chia đôi tại đây và lấy $21/16 = 1,3125$ hay $43/32 = 1,34375$ làm giá trị gần đúng của α thì sai số không vượt quá $1/2^5 = 1/32 = 0,03125$. Như

vậy ta đã chia đôi 5 lần khoảng $[1, 2]$ là $2-1=1$. Nếu yêu cầu sai số bé hơn thì ta phải tiếp tục chia đôi.

2.2.3. Sơ đồ tóm tắt phương pháp chia đôi

- 1) Cho phương trình $f(x) = 0$.
- 2) Ấn định sai số cho phép ε .
- 3) Xác định khoảng phân ly nghiệm $[a, b]$.
- 4) Lập chương trình tính theo sơ đồ khối sau đây:



Chú ý: Xem phần phụ lục để tham khảo chương trình tính gần đúng phương trình một ẩn bằng phương pháp chia đôi.

2.3. PHƯƠNG PHÁP LẶP

2.3.1 Mô tả phương pháp

Xét phương trình (2-1) với giả thiết nó có nghiệm thực α và phân ly trong khoảng $[a, b]$. Trước hết ta chuyển phương trình (2-1) về dạng tương đương:

$$x = \varphi(x) \quad (2-12)$$

Sau đó ta chọn một số x_0 nào đó $\in [a, b]$ làm xấp xỉ đầu rồi tính dần dãy số x_n theo quy tắc:

$$x_n = \varphi(x_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2-13)$$

$$x_0 \text{ cho trước } \in [a, b] \quad (2-14)$$

Quá trình này có tính lặp đi lặp lại nên phương pháp này có tên là *phương pháp lặp*, hàm φ gọi là *hàm lặp*.

2.3.2. Sự hội tụ của phương pháp lặp

Định nghĩa: Nếu dãy $x_n \rightarrow \alpha$ khi $n \rightarrow \infty$ thì ta nói phương pháp lặp (2-13), (2-14) hội tụ.

Khi phương pháp lặp hội tụ thì x_n càng gần với α nếu n càng lớn. Cho nên ta có thể xem x_n với n xác định là giá trị gần đúng của α . Nếu phương pháp lặp không hội tụ thì x_n có thể rất xa α . Vì vậy chỉ có phương pháp lặp hội tụ mới có giá trị. Để kiểm tra xem một phương pháp lặp có hội tụ hay không ta dùng định lý sau.

Định lý 4: Xét phương pháp lặp (2-13), (2-14) giả sử :

- 1) $[a, b]$ là khoảng phân ly nghiệm α của phương trình (2-1) tức là của phương trình (2-12);
- 2) Mọi x_n tính theo (2-13) (2-14) đều $\in [a, b]$;
- 3) Hàm $\varphi(x)$ có đạo hàm thỏa mãn:

$$|\varphi'(x)| \leq q < 1 \quad a < x < b \quad \text{Trong đó } q \text{ là một hằng số.} \quad (2-15)$$

Thế thì phương pháp lặp (2-13), (2-14) hội tụ :

$$x_n \rightarrow \alpha \text{ khi } n \rightarrow \infty \quad (2-16)$$

Chúng minh định lý :

Trước hết vì α là nghiệm của (2-12) nên có $\alpha = \varphi(\alpha)$ đem đẳng thức này trừ đi (2-13) vế với vế ta được

$$\alpha - x_n = \varphi(\alpha) - \varphi(x_{n-1}) \quad (2-17)$$

Ta sẽ áp dụng công thức Lagrangio vào vế phải của đẳng thức trên.

Công thức Lagrangio được phát biểu: Cho hàm số $F(x)$ liên tục trên $[a, b]$, có đạo hàm trong (a, b) thì tồn tại số $c \in (a, b)$, tức là $c = a + \theta(b-a)$, $0 < \theta < 1$ sao cho:

$$F(b) - F(a) = F'(c)(b-a) \quad (2-18)$$

Áp dụng (2-18) ta có :

$$\alpha - x_n = \varphi'(c) (\alpha - x_{n-1}) \quad (2-19)$$

với $c = a + \theta(\alpha - x_{n-1}) \in (a, b)$.

Theo giả thiết (2-15) ta có $|\varphi'(c)| \leq q < 1$. Do vậy (2-19) cho

$$|\alpha - x_n| = |\varphi'(c)| |\alpha - x_{n-1}| \leq q |\alpha - x_{n-1}|$$

Nên có $|\alpha - x_n| \leq q |\alpha - x_{n-1}|$

Bất đẳng thức này đúng với mọi n . Do vậy có :

$$|\alpha - x_n| \leq q |\alpha - x_{n-1}|$$

$$|\alpha - x_{n-1}| \leq q |\alpha - x_{n-2}|$$

.. ..

$$|\alpha - x_2| \leq q |\alpha - x_1|$$

$$|\alpha - x_1| \leq q |\alpha - x_0|$$

Nhân các bất đẳng thức này về với về ta được :

$$|\alpha - x_n| \leq q^n |\alpha - x_0| \quad (2-20)$$

Vì α và x_0 đã xác định, $q_n \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$ do $0 < q < 1$, nên về phải $\rightarrow 0$ và ta có

$$|\alpha - x_n| \rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow \infty$$

Đó chính là điều phải chứng minh.

2.3.3 Chú thích

Khi hàm φ đã thỏa mãn giả thiết 3) của định lý 4 thì sự thỏa mãn giả thiết 2) phụ thuộc vào việc chọn x_0 và nó thỏa mãn trong điều kiện sau: Giả sử $|\varphi'(x)| \leq q < 1$. Nếu $\varphi'(x) > 0$ ta có thể chọn $x_0 \in [a, b]$ một cách bất kỳ, còn nếu $\varphi'(x) < 0$ thì phải chọn x_0 theo quy tắc:

$$\begin{aligned} x_0 = a & \quad \text{khi} \quad a < \alpha < \frac{(a+b)}{2} \\ x_0 = b & \quad \text{khi} \quad \frac{(a+b)}{2} < \alpha < b \end{aligned} \quad (2-21)$$

Muốn biết α thuộc khoảng nào ta chỉ việc tính $f((a+b)/2)$ rồi so sánh dấu của nó với dấu của $f(a)$.

2.3.4. Đánh giá sai số

Giả sử ta tính theo (2-13) (2-14) n lần và xem x_n là giá trị gần đúng của α . Khi đó sai số $|\alpha - x_n|$ có thể đánh giá bởi công thức $|\alpha - x_n| \leq q^n |\alpha - x_0|$. Ta còn có

$$|\alpha - x_0| < b - a \quad \text{nên:} \quad |\alpha - x_n| \leq q^n (b - a) \quad (2-22)$$

Nhưng công thức này thường cho sai số quá lớn so với thực tế. Ta xét một công thức đánh giá sai số khác như sau.

Định lý 5 : Xét phương trình

$$F(x) = 0 \quad (2-23)$$

Có nghiệm $X \in [c,d]$ và $\bar{X}$ là một số $\in [c,d]$ được xem là giá trị gần đúng của X . Lúc đó ta có

$$|\bar{X} - X| \leq \frac{|F(\bar{X})|}{m} \quad (2-24)$$

Trong đó m là một số dương thỏa mãn

$$|F'(x)| \geq m > 0, \quad c < x < d \quad (2-25)$$

Chứng minh : Theo giả thiết ta có $F(X) = 0$ nên có $F(\bar{X}) = F(X)$

Áp dụng công thức Lagrangio (2-18) vào vế phải được $F(\bar{X}) = F'(C) (\bar{X} - X)$

Trong đó $C = X + \theta(\bar{X} - X) \in (c,d)$. Theo giả thiết (2-25) ta có

$$|F(\bar{X})| = |F'(C)| |\bar{X} - X| \geq m |\bar{X} - X| \quad \text{từ đó ta rút ra kết luận (2-24).}$$

Ta áp dụng kết quả này để đánh giá sai số của phương pháp lặp.

Với $F(x) = x - \varphi(x)$, $c = a$, $d = b$

$$X = \alpha, \quad \bar{X} = x_n$$

$$\text{Ta thu được} \quad |\alpha - x_n| \leq \frac{|x_n - \varphi(x_n)|}{m} \quad (2-26)$$

Trong đó m là một số dương thỏa mãn

$$0 < m < |(x - \varphi(x))'|, \quad a < x < b$$

Theo giả thiết (2-15) của định lý 4 ta có:

$$|(x - \varphi(x))'| = |1 - \varphi'(x)| \geq 1 - |\varphi'(x)| \geq 1 - q > 0$$

$$\begin{aligned} \text{Mặt khác} \quad \varphi(x_n) - x_n &= \varphi(x_n) - \varphi(x_{n-1}) \\ &= \varphi'(c)(x_n - x_{n-1}) \end{aligned}$$

$$\text{Trong đó} \quad c = x_{n-1} + \theta(x_n - x_{n-1}) \in (a,b)$$

Do đó :

$$|\varphi(x_n) - x_n| = |\varphi'(c)| |x_n - x_{n-1}| \leq q |x_n - x_{n-1}|$$

Vậy (2-26) trở thành:

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{q}{1-q} |x_n - x_{n-1}| \quad (2-27)$$

Công thức này cho phép ta đánh giá sai số theo những đại lượng vừa tính được x_{n-1} và x_n .

2.3.5. Ví dụ

Xét phương trình $x^3 - x - 1$. Ta đã chứng minh được nó có một nghiệm thực α phân ly trong khoảng $[1,2]$. Bây giờ ta dùng phương pháp lặp để tính gần đúng nghiệm α đó. Muốn thế trước hết ta tìm hàm lặp $\varphi(x)$ thích hợp để phương pháp lặp hội tụ, tức là $\varphi(x)$ phải thỏa mãn những giả thiết của định lý 4.

$$\text{Phương trình có thể được viết thành : } x = x^3 - 1 \quad (2-28)$$

Và đặt $\varphi(x) = x^3 - 1$ nhưng lúc này $\varphi'(x) = 3x^2 \geq 3$ tại mọi $x \in [1,2]$.

Nếu hàm lặp chọn như vậy phương pháp lặp sẽ không có hy vọng hội tụ. Ta viết phương trình dưới dạng khác như sau :

$$x^3 = x + 1$$

$$x = (x + 1)^{1/3}$$

Ta đặt $\varphi(x) = (x + 1)^{1/3}$ (2-29)

Lúc đó $\varphi'(x) = (1/3)(x + 1)^{-2/3} = \left(\frac{1}{3}\right) \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}$ nên

$$0 < \varphi'(x) \leq 1/3 \text{ tại mọi } x \in [1,2]$$

Lúc này hàm lặp $\varphi(x)$ thỏa mãn các điều kiện của định lý 4 và chú thích ở công thức (2-21). Ta bắt đầu thực hiện phép lặp tại x_0 bất kỳ trong $[1,2]$; chẳng hạn chọn $x_0 = 1$. Giả sử ta tính lặp 5 lần với các kết quả như sau :

$$x_0 = 1$$

$$x_1 = 1,25992105; \quad |\alpha - x_1| \leq 0,13$$

$$x_2 = 1,312293837; \quad |\alpha - x_2| \leq 0,027$$

$$x_3 = 1,322353819; \quad |\alpha - x_3| \leq 0,005$$

$$x_4 = 1,324268745; \quad |\alpha - x_4| \leq 0,00096$$

$$x_5 = 1,324632625; \quad |\alpha - x_5| \leq 0,000182$$

Kết quả này có quá nhiều chữ số đáng nghi. Ta quy tròn nó đến 4 chữ số lẻ thập phân bằng cách viết:

$$\alpha - 1,3246 = \alpha - x_5 + x_5 - 1,3246$$

$$|\alpha - 1,3246| \leq |\alpha - x_5| + |x_5 - 1,3246|$$

$$|\alpha - 1,3246| \leq 0,000182 + 0,00003265$$

Do đó : $|\alpha - 1,3246| \leq 0,00025$

Vậy ta có kết quả là $\alpha = 1,3246 \pm 0,00025$.

Chú ý : Trong thực tế người ta dừng quá trình tính khi

$$|(x_n - x_{n-1})| < \text{sai số cho phép } \varepsilon$$

2.3.6 Thuật toán của phương pháp lặp

- Cho phương trình $f(x) = 0$
- Ấn định sai số cho phép ε
- Xác định khoảng phân ly nghiệm $[a,b]$
- Tìm hàm lặp hội tụ φ
- Chọn xấp xỉ đầu x_0
- Tính $x_n = \varphi(x_{n-1})$ với $n = 1,2,3,...$ cho tới khi $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$ thì dừng.

Lấy kết quả $\alpha \approx x_n$ với sai số $|\alpha - x_n| \leq \frac{q}{1-q} \varepsilon$ trong đó q là số dương nhỏ hơn 1

thỏa mãn $|\varphi'(x)| \leq q < 1$ với mọi $x \in (a,b)$.

2.4. PHƯƠNG PHÁP TIẾP TUYẾN

2.4.1. Mô tả phương pháp

Mục tiêu của phương pháp tiếp tuyến là tìm cách thay phương trình (2-1), phi tuyến đối với x , bằng một phương trình gần đúng tuyến tính đối với x . Chúng ta dùng khai triển Taylo để làm điều đó.

Công thức Taylo : Cho hàm số $F(x)$ xác định và có đạo hàm đến cấp $n+1$ tại x_0 và lân cận x_0 . Thế thì khai triển Taylo bậc n của $F(x)$ tại x_0 là:

$$F(x) = F(x_0) + (x - x_0)F'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}F''(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!}F^{(n)}(x_0) + \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}F^{(n+1)}(c) \quad (2-30)$$

$$c = x_0 + \theta(x - x_0); \quad 0 < \theta < 1 \quad (2-31)$$

Công thức này có giá trị tại các giá trị x tại lân cận x_0 , c là một số trung gian nằm giữa x_0 và x .

Xét phương trình (2-1) với giả thiết nó có nghiệm thực α phân ly trong $[a, b]$. Giả sử hàm f có đạo hàm $f'(x) \neq 0$ tại $x \in [a, b]$ đạo hàm cấp hai $f''(x)$ tại $x \in (a, b)$. Ta chọn $x_0 \in [a, b]$ rồi viết khai triển Taylo bậc nhất của f tại x_0 :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 f''(c)$$
$$x \in [a, b], \quad c = x_0 + \theta(x - x_0) \in (a, b)$$

Như vậy phương trình (2-1) được viết thành :

$$f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 f''(c) = 0$$

Ta bỏ qua số hạng cuối cùng và được phương trình:

$$f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) = 0 \quad (2-32)$$

Tức là ta đã thay phương trình (2-1) bằng phương trình bậc nhất (2-32). Đó là việc thay thế gần đúng. Gọi x_1 là nghiệm của (2-32) ta có ngay :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad (2-33)$$

Từ x_0 ta tính một cách tương tự ra x_1 , vv... và một cách tổng quát, khi đã biết x_n ta tính x_{n+1} theo công thức

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (2-34)$$

$$x_0 \text{ chọn trước trên } [a, b] \quad (2-35)$$

và xem x_n là giá trị gần đúng của nghiệm α .

Phương pháp tính x_n theo phương pháp tuyến tính hóa trên gọi là phương pháp Niuton hay cũng chính là *phương pháp tiếp tuyến*.

Chú ý 1 : Nhìn vào (2-34) , (2-35) ta thấy phương pháp tiếp tuyến cũng là loại phương pháp lặp với hàm lặp

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad (2-36)$$

Chú ý 2 : Về mặt hình học thì $f(x_0)$ là hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại x_0 . Ta xem trên hình 2-6.

Đoạn đồ thị AB cắt trục hoành tại M

Có hoành độ chính là nghiệm đúng α .

Để tính gần đúng α ta thay một cách

gần đúng cung AB bởi tiếp tuyến tại B,

B có hoành độ x_0 , tiếp tuyến này cắt

trục hoành tại P, P có hoành độ x_1 và ta

xem x_1 là giá trị gần đúng của α .

Để tính x_1 ta viết phương trình tiếp tuyến tại B

Với $x_0 = b$ ta có : $Y - f(x_0) = f'(x_0)(X - x_0)$

Tại P ta có $X = x_1$, $Y = 0$ nên có :

$$-f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

Từ đó ta suy ra (2-33). Cho nên phương pháp này được gọi là phương pháp tiếp tuyến.

2.4.2. Sự hội tụ và sai số

Vấn đề ở đây là khi tính bằng phương pháp tiếp tuyến thì phải có $x_n \rightarrow \alpha$ khi $n \rightarrow \infty$. Điều này được khẳng định ở định lý sau.

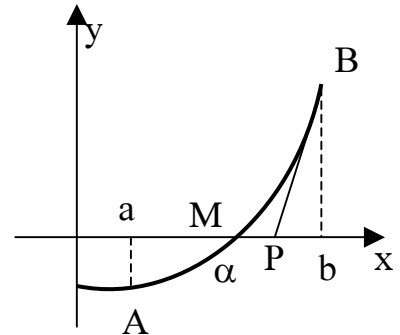
Định lý 6: Giả sử $[a,b]$ là khoảng phân ly nghiệm của phương trình (2-1), f có đạo hàm f' , f' và f liên tục trên $[a,b]$, f và f' không đổi dấu trong (a,b) . Xấp xỉ đầu x_0 chọn là a hay b sao cho $f(x_0)$ cùng dấu với f' . Khi đó x_n tính bởi (2-34) (2-35) hội tụ về α khi $n \rightarrow \infty$, cụ thể hơn ta có x_n đơn điệu tăng tới α nếu $ff' < 0$, x_n đơn điệu giảm tới α nếu $ff' > 0$. Khi dừng lại ở n xác định ta được x_n và coi x_n gần đúng với α .

Về sai số áp dụng định lý 5 ta có :

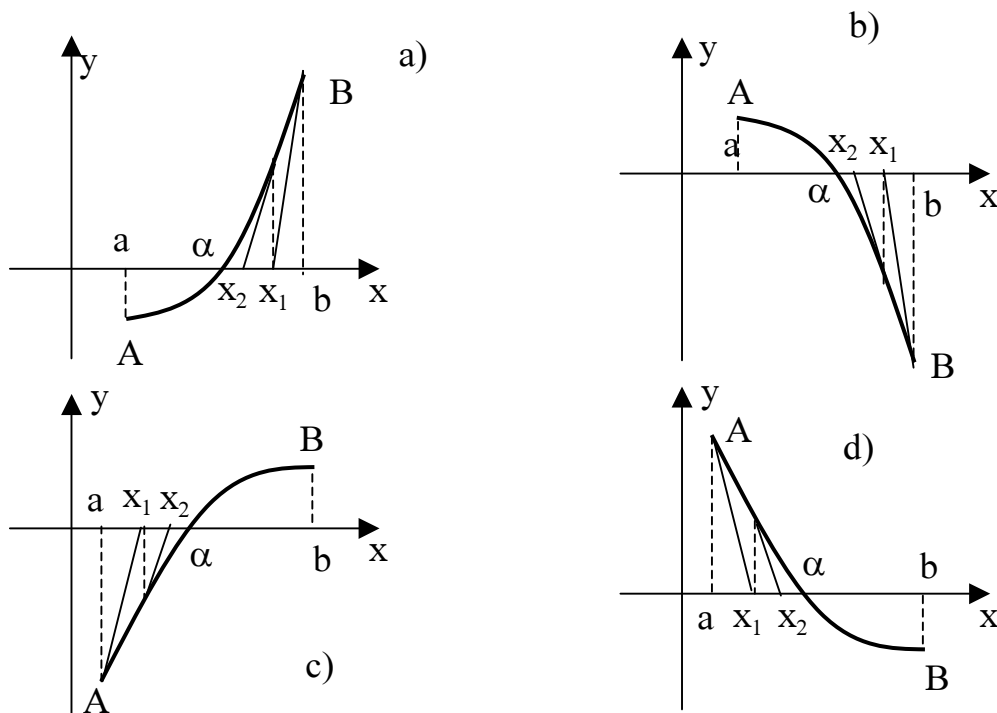
$$|\alpha - x_n| \leq \frac{|f(x_n)|}{m} \quad (2-37)$$

$$\text{Với } 0 < m \leq |f'(x)|, \quad \alpha \leq x \leq b \quad (2-38)$$

Ta không chứng minh định lý 6 nhưng có thể hiểu trên các hình 2-7 dưới đây.



Hình 2-6



Hình 2-7

2.4.3 Thí dụ

* Hãy tính căn bậc hai của một số dương a . Tức là có phương trình $x^2 = a$ hay ta có thể viết là :

$$f(x) = x^2 - a = 0 \quad (2-39)$$

Rõ ràng nghiệm dương của phương trình (2-39) phân ly trong khoảng $[1, a]$; Trong khoảng đó $f'(x) = 2x > 0$, $f'' = 2 > 0$. Vậy ta có thể áp dụng định lý 6. Công thức (2-34) viết thành :

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) \quad (2-40)$$

Với $a = 2$ ta có $f(2) = 2^2 - 2 > 0$ cùng dấu với f' nên ta chọn $x_0 = 2$. Áp dụng công thức (2-40) có :

$$\begin{aligned} x_1 &= 1,5 \\ x_2 &= 1,417 \\ x_3 &= 1,41421 \end{aligned}$$

Ta biết $\sqrt{2} = 1,414213562$ nên ta thấy phương pháp tiếp tuyến hội tụ rất nhanh.

- Ta lại giải phương trình (2-9), $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$ ta đã tìm được khoảng phân ly nghiệm của nó là $[1, 2]$. Trong khoảng đó

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 1 > 0 \\ f''(x) &= 6x > 0 \end{aligned}$$

Vậy có thể áp dụng định lý 6. Để chọn x_0 ta tính $f(2) = 2^3 - 2 - 1 = 5 > 0$ cùng dấu với f' vậy chọn $x_0 = 2$. Ta có công thức tính :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - x_n - 1}{3x_n^2 - 1}$$

$$x_0 = 2$$

Ta có bảng kết quả tính toán như sau:

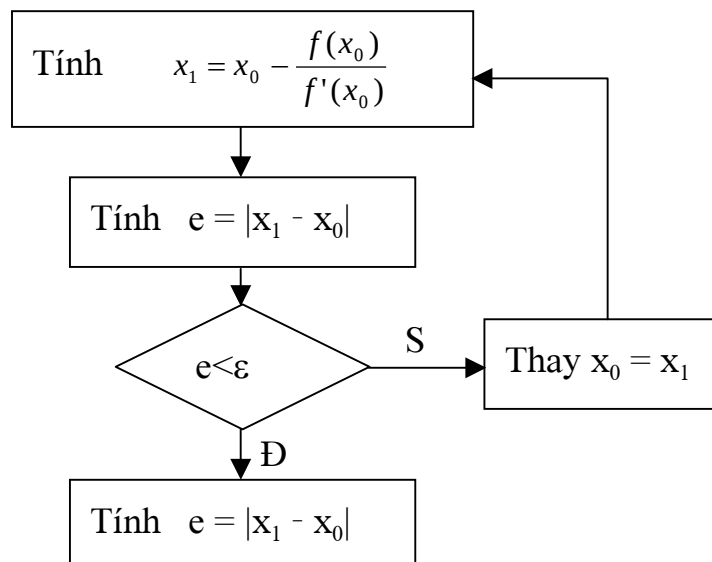
n	x_n	Sai số
0	2	
1	1,545454545	
2	1,359614916	
3	1,325801345	
4	1,324719049	0,0000024
5	1,324717950	2.10^{-10}

2.4.4. Chú ý

Trong thực tế ta dừng quá trình tính khi $|x_n - x_{n-1}| < \text{sai số cho phép } \varepsilon$

2.4.5. Thuật toán giải bằng phương pháp tiếp tuyến

1. Cho phương trình $f(x) = 0$
2. Ấn định sai số cho phép ε
3. Tìm khoảng phân ly nghiệm $[a, b]$ trong đó f' và f'' không đổi dấu.
4. Chọn x_0
- 5.



Với sai số $|\alpha - x_1| \leq \frac{|f(x_1)|}{m}$ trong đó $0 < m < |f'(x)|$, $x \in (a, b)$.

2.5. PHƯƠNG PHÁP DÂY CUNG

2.5.1. Mô tả phương pháp

Trong phương pháp tiếp tuyến ta đã thay cung đồ thị AB của hàm $y = f(x)$ bởi tiếp tuyến vẽ tại A hay B. Bây giờ ta thay cung AB bởi dây cung AB rồi lấy hoành độ x_1 của giao điểm P của dây cung với trục hoành làm giá trị gần đúng của nghiệm α . (H. 2-8).

Phương trình dây cung AB được viết :

$$\frac{Y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{X - a}{b - a}$$

Tại giao điểm P có $Y = 0$, $x = x_1$, nên :

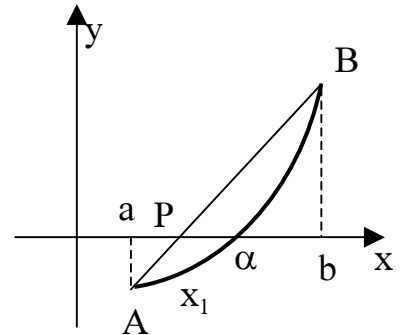
$$\frac{-f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x_1 - a}{b - a}$$

Từ đó suy ra:

$$x_1 = a - \frac{(b - a)f(a)}{f(b) - f(a)} \quad (2-41)$$

Hay:

$$x_1 = \frac{af(b) - bf(a)}{f(a) - f(b)} \quad (2-42)$$



Hình 2-8

Phương pháp tính x_1 như vậy gọi là phương pháp dây cung. Sau khi tính được x_1 ta tìm khoảng phân ly nghiệm mới xem là $[a, x_1]$ hay $[x_1, b]$ rồi lại tiếp tục phương pháp dây cung như trên cho khoảng phân ly nghiệm mới, đã thu nhỏ hơn khoảng cũ. Cứ tiếp tục như thế ta được các giá trị $x_2, x_3, \dots, x_n$, ngày càng gần α . Sai số có thể tính bằng (2-24).

2.5.2. Thí dụ

Ta lại xét phương trình (2-9), khoảng phân ly nghiệm của nó là $[1, 2]$. Ta có:

$$a = 1; \quad f(a) = f(1) = 1^3 - 1 - 1 = -1 < 0$$

$$b = 2 \quad f(b) = f(2) = 2^3 - 2 - 1 = 5 > 0$$

Theo (2-42) có :

$$x_1 = \frac{1.5 - 2.(-1)}{5 - (-1)} = 1,167$$

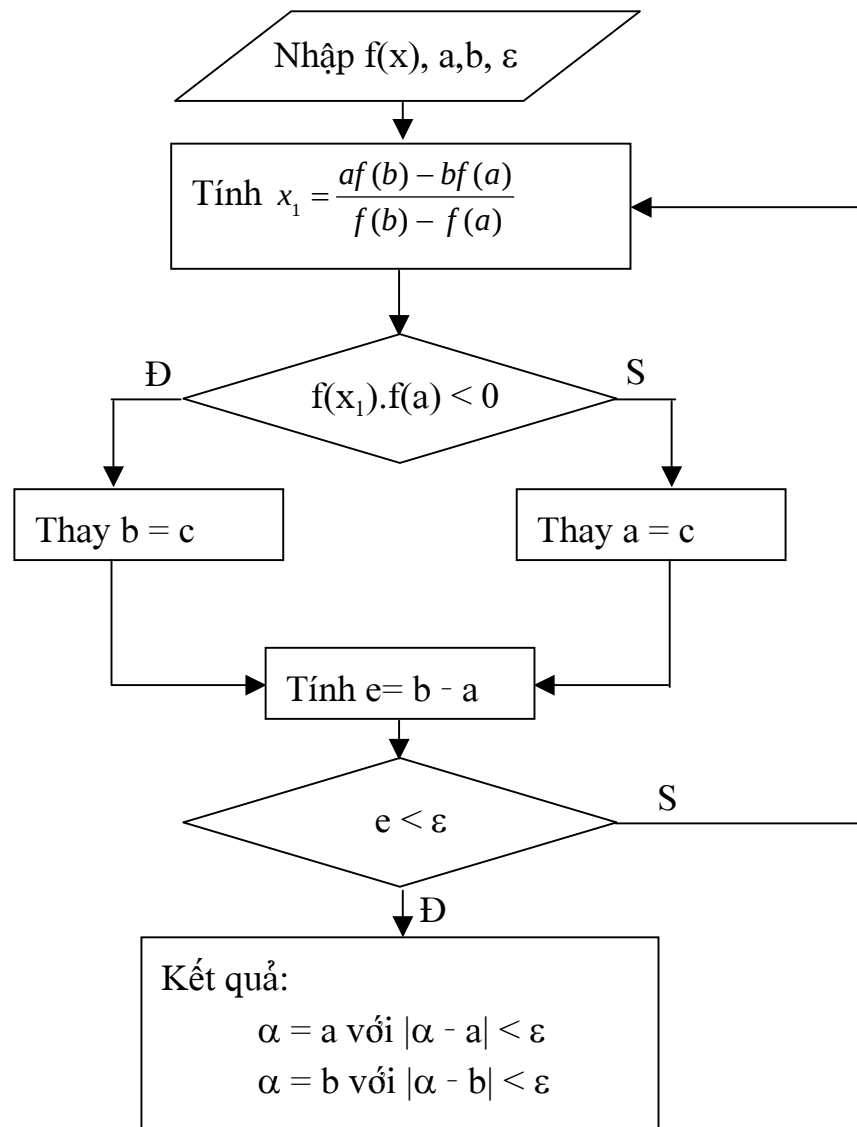
Tiếp tục ta có $f(1,167) = -0,58 < 0$; khoảng phân ly nghiệm mới là $[1,167; 2]$. Ta tìm được

$$x_2 = \frac{1,167.5 - 2.(-0,58)}{5 - (-0,58)} = 1,253$$

Sai số tính theo (2-24) là 0,15. Như vậy phương pháp dây cung hội tụ chậm hơn phương pháp tiếp tuyến.

2.5.3. Sơ đồ tóm tắt phương pháp dây cung

1. Cho phương trình $f(x) = 0$.
2. Chọn sai số cho phép ε .
3. Tìm khoảng phân ly nghiệm $[a,b]$.
4. Sơ đồ tính



Sai số $|\alpha - x_1| < \frac{|f(x_1)|}{m}$ trong đó $0 < m < |f'(x)|$, $x \in (a,b)$.

BÀI TẬP

Câu 1 : Tìm nghiệm gần đúng của phương trình sau :

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 5 = 0$$

Bằng phương pháp tiếp tuyến. Sai số không quá 10^{-5} .

Câu 2 : Tìm nghiệm gần đúng của phương trình sau :

$$4x - 5\ln x = 5$$

Bằng phương pháp lặp. Sai số không quá 10^{-3} .

Câu 3 : Tìm nghiệm dương gần đúng của phương trình sau :

$$f(x) = x^3 - 0.2x^2 - 0.2x - 1.2 = 0$$

Bằng phương pháp chia đôi, sai số không quá 0.002.

Câu 4 : Tìm những nghiệm gần đúng của phương trình sau với 4 chữ số đáng tin:

$$x^4 - 5x^3 - 12x^2 + 76x - 79 = 0$$

Biết rằng nó có hai nghiệm trong lân cận $x = 2$.

Câu 5: Tìm nghiệm nằm trong khoảng (1,2) của phương trình:

$$x^6 = x^4 + x^3 + 1$$

Với 6 chữ số đáng tin.

CHƯƠNG 3

3.1.1. Dạng tổng quát của một hệ đại số tuyến tính

Một hệ đại số tuyến tính có thể có m phương trình n ẩn. Trong phạm vi chương này ta chỉ xét những hệ phương trình n phương trình n ẩn không suy biến.

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = f_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = f_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = f_n \end{array} \right| \quad (3.1)$$

trong đó a_{ij} là hệ số của ẩn x_j ở phương trình thứ i . Giả sử đã biết a_{ij} và f_i ta phải tìm các ẩn x_i .

Ma trận

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (3.2)$$

gọi là ma trận hệ số của hệ (3.1). Các véc tơ:

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_n \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

được gọi là vec tơ về phải và vec tơ ẩn của hệ. Ta cũng có thể viết các vec tơ cột trên thành các vec tơ dòng như sau :

$$f = (f_1 \quad f_2 \quad \dots \quad f_n)^T \quad X = (x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n)^T$$

Biết rằng tích của ma trận A với véc tơ x viết là Ax . Mỗi dòng của ma trận Ax là một véc tơ có toạ độ thứ i là :

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$$

Đó cũng chính là vế trái của phương trình thứ i của hệ (3.1).

Vậy hệ (3.1) có thể viết dưới dạng sau :

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{f} \quad (3.4)$$

3.1.2. Sự tồn tại và duy nhất nghiệm của hệ

Gọi định thức của ma trận A là định thức của hệ, viết là Δ , tức là : $\Delta = \det(A)$. Nếu $\Delta = 0$ ta nói ma trận A suy biến và hệ (3.1) cũng là hệ (3.4) là suy biến.

Gọi Δ_i là định thức suy từ Δ bằng cách thay cột thứ i bởi cột vế phải. Ta có định lý Crame như sau .

Định lý 1: Nếu $\Delta \neq 0$ tức là nếu hệ không suy biến thì hệ (3.1) có nghiệm duy nhất cho bởi công thức:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.5)$$

3.1.3. Chú thích

Kết quả này rất gọn và rất đẹp về mặt lý thuyết nhưng tính nghiệm bằng công thức (3.5) tốn rất nhiều công sức và giấy bút. Số lượng $N_C(n)$ các phép tính sơ cấp (+, -, x, :) cần thiết là vào cỡ $N_C(n) = (n+1)!n$. Chỉ với $n = 15$ thì $N_C(15) = 3 \cdot 10^{14}$. Đây là một số rất lớn. Nếu tính sẽ mất rất nhiều thời gian.

3.2. PHƯƠNG PHÁP GAUSS

3.2.1 Giải hệ phương trình đại số tuyến tính

1. Mô tả phương pháp

Đây là phương pháp khử dần các ẩn để đưa hệ về một hệ có dạng tam giác trên. Lúc đó ta tìm được x_n ở phương trình cuối cùng, từ đó tính ngược lên ta tìm được các ẩn còn lại. Như vậy ta phải thực hiện qua hai bước *Thuận* và *Ngược* như sau.

Cho hệ (3.1) viết dưới dạng vectơ :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = a_{i,n+1} \quad (i = \overline{1, n}) \quad (3.6)$$

Bước thuận : Dùng phép biến đổi tương đương đưa (3.6) về dạng tam giác trên.

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + b_{12}^{(0)} x_2 + b_{13}^{(0)} x_3 + \dots + b_{1,n-1}^{(0)} x_{n-1} + b_{1n}^{(0)} x_n = b_{1,n+1}^{(0)} \\ \quad x_2 + b_{23}^{(1)} x_3 + \dots + b_{2,n-1}^{(1)} x_{n-1} + b_{2n}^{(1)} x_n = b_{2,n+1}^{(1)} \\ \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad x_{n-1} + b_{n-1,n}^{(n-2)} x_n = b_{n-1,n+1}^{(n-2)} \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad x_n = b_{n,n+1}^{(n-1)} \end{array} \right. \quad (3.7)$$

Ta có các công thức tính toán sau :

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} b_{kj}^{(k-1)} \quad (i, j \geq k) \quad (3.8)$$

$$b_{kj}^{(k-1)} = \frac{a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \quad (j > k) \quad (3.9)$$

Phương pháp Gauss thực hiện được nếu $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$ với mọi $k = \overline{1, n}$ trong đó $a_{11}^0 = a_{11}$

Bước ngược : Tìm các ẩn theo thứ tự từ x_n đến x_1 từ hệ (3.7) .

Bây giờ ta kiểm chứng các công thức trên cho một hệ ba phương trình ba ẩn.

Hệ xuất phát (3.1) có dạng :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = a_{14} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = a_{24} \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = a_{34} \end{cases} \quad (3.10)$$

Giả sử $a_{11} \neq 0$. Chia hai vế của phương trình đầu của hệ (3.10) cho a_{11} (ta gọi phần tử a_{11} là phần tử dẫn), được:

$$x_1 + b_{12}^{(0)}x_2 + b_{13}^{(0)}x_3 = b_{14}^{(0)} \quad (3.11)$$

trong đó $b_{1j}^{(0)} = \frac{a_{1j}}{a_{11}} \quad (j > 1)$

Như vậy công thức (3.9) với $k = 1$ được chứng minh. Tiếp theo ta dùng (3.11) để khử x_1 trong các phương trình thứ hai và thứ ba của hệ (3.10) bằng cách lấy phương trình (3.11) nhân với a_{i1} ($i = 2, 3$) rồi trừ đi phương trình thứ i tương ứng. Ta có :

$$\begin{cases} a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 = a_{24}^{(1)} \\ a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 = a_{34}^{(1)} \end{cases} \quad (3.10')$$

Trong đó $a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{i1}b_{1j}^{(0)} \quad (i, j \geq 2)$. Ta có công thức (3.8) với $k = 1$.

Chia hai vế của phương trình đầu của (3.10') cho phần tử dẫn $a_{22}^{(1)}$, ta được:

$$x_2 + b_{23}^{(1)}x_3 = b_{24}^{(1)} \quad (3.11')$$

với $b_{2j}^{(1)} = \frac{a_{2j}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \quad (j > 2)$.

Bây giờ ta chỉ còn khử x_2 trong phương trình cuối cùng của (3.10') ta được :

$$a_{33}^{(2)}x_3 = a_{34}^{(2)} \quad (3.10'')$$

Trong đó $a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - a_{i2}^{(1)}b_{2j}^{(1)} \quad (i, j \geq 3)$.

Từ (3.10'') ta tìm được $x_3 = \frac{a_{34}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} = b_{34}^{(2)}$.

Lúc này ta có hệ tương đương dạng tam giác ngược là:

$$\begin{cases} x_1 + b_{12}^{(0)}x_2 + b_{13}^{(0)}x_3 = b_{14}^{(0)} \\ \quad \quad \quad x_2 + b_{23}^{(1)}x_3 = b_{24}^{(1)} \\ \quad \quad \quad \quad x_3 = b_{34}^{(2)} \end{cases}$$

Đến đây bước thuận kết thúc.

Bước ngược là việc tính các nghiệm theo trình tự ngược:

$$x_3 = b_{34}^{(2)}$$

$$x_2 = b_{24}^{(1)} - b_{23}^{(1)}x_3$$

$$x_1 = b_{14}^{(0)} - b_{13}^{(0)}x_3 - b_{12}^{(0)}x_2$$

3.2.2 Thí dụ

Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

Kết quả tính toán ghi trong bảng dưới:

dòng		x_1	x_2	x_3	f	Σ
Bước thuận						
1		1	2	3	1	7
2		2	1	3	2	8
3		3	2	1	3	9
4	x d1 với -2 rồi + với d2	0	-3	-3	0	-6
5	x d1 với -3 rồi + với d3	0	-4	-8	0	-12
6	Chia d4 cho -3	0	1	1	0	2
7	x d6 với 4 rồi + với d5	0	0	-4	0	-4
8	Chia d7 cho -4	0	0	1	0	
Bước nghịch						
9		0	0	1	0	1
10		0	1	0	0	1
11		1	0	0	1	2

Khối lượng tính toán của phương pháp Gauss (kể cả các phép tính kiểm tra Σ) :

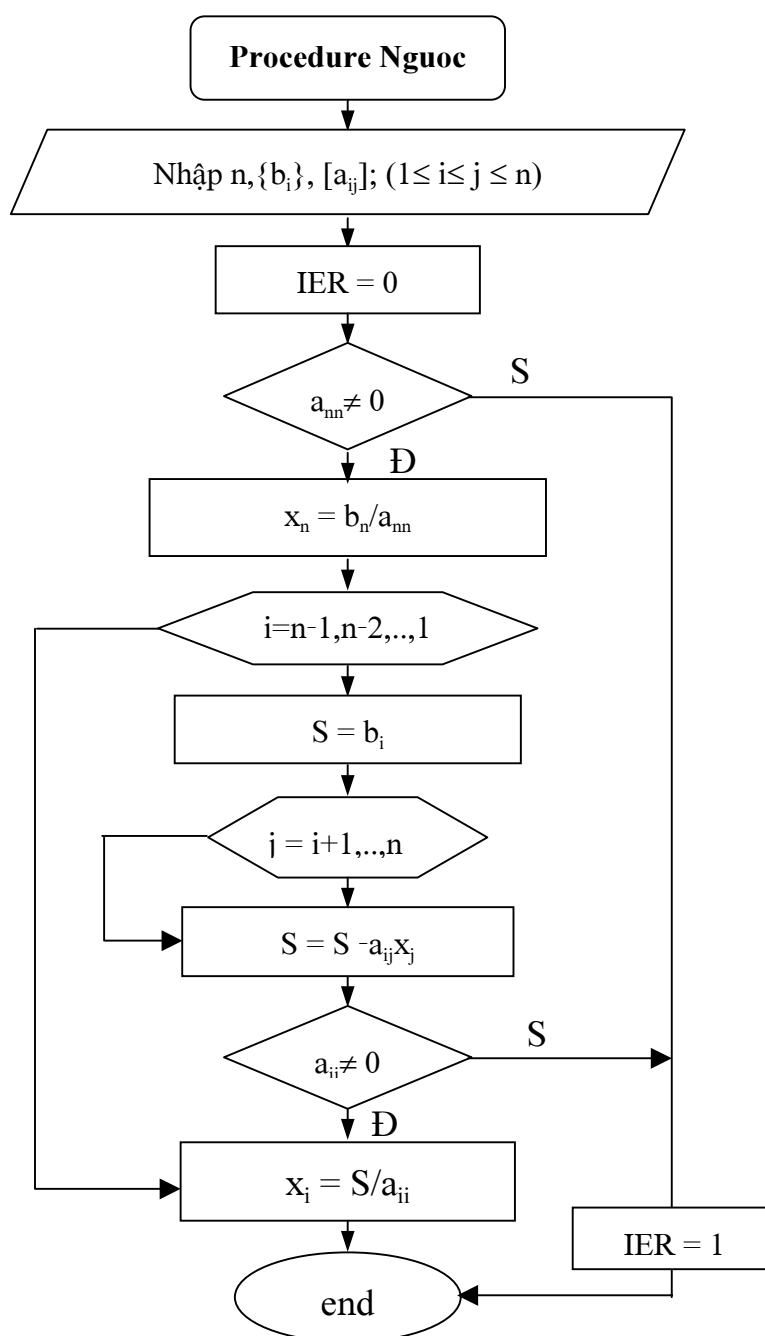
Ở bước thuận, số phép tính nhân, chia là:

$$n(n+1) + (n-1)n + \dots + 1.2 = (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + (1 + 2 + \dots + n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

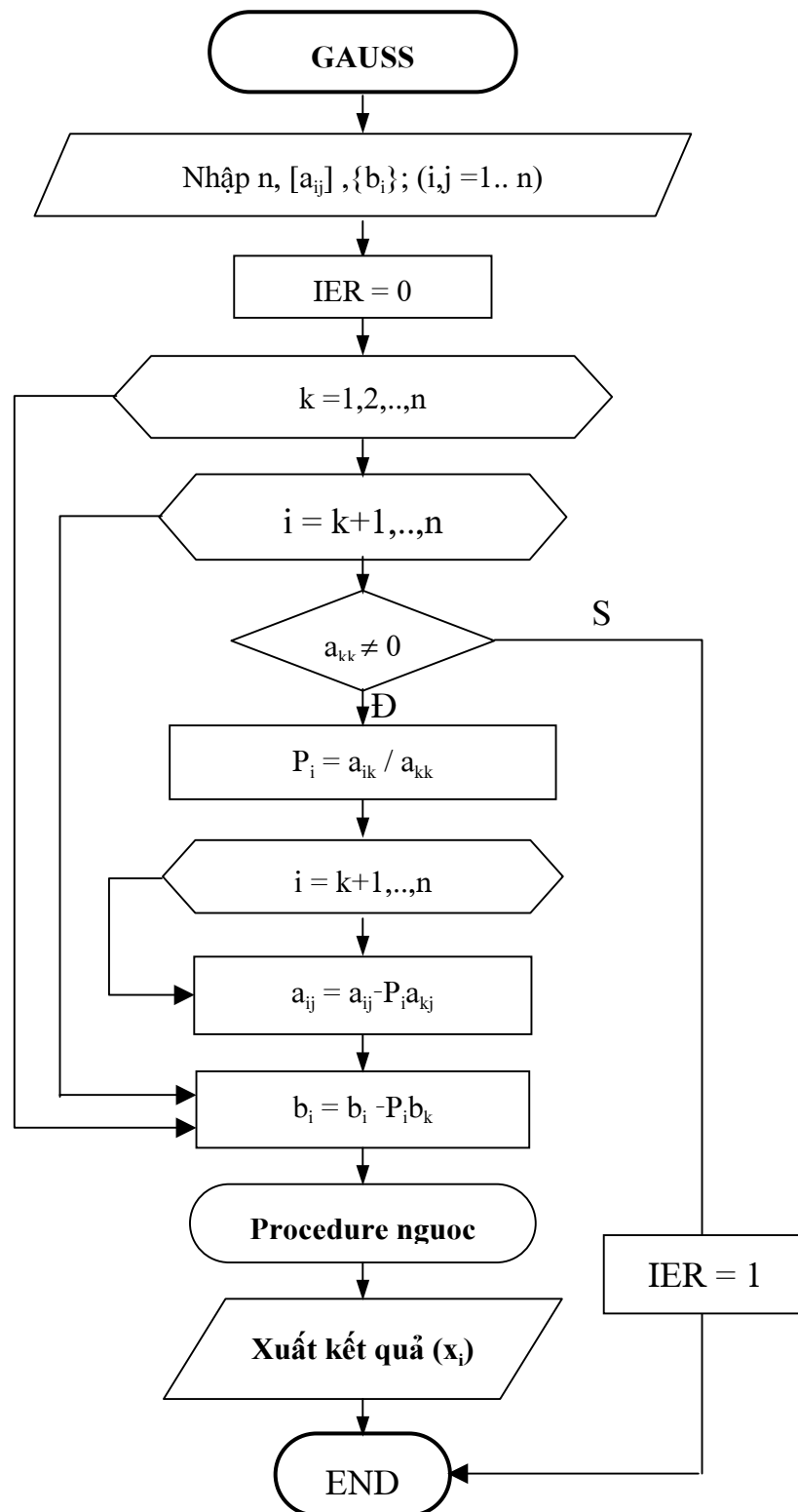
Ở bước ngược số phép tính nhân, chia là $n(n-1)$. Vậy số phép tính nhân, chia của phương pháp Gauss là : $N = \frac{n}{3}(n^2 + 6n - 1)$

Phương pháp này có ưu điểm là đơn giản dễ lập trình nhưng thuật toán sẽ không thực hiện được nếu phần tử dẫn $a_{kk}^{(k-1)} = 0$. Nếu phần tử dẫn $a_{kk}^{(k-1)} \approx 0$ cũng có thể cho kết quả không chính xác.

Ta có thể lập được sơ đồ khối của phương pháp bằng cách dùng chương trình con để thực hiện bước ngược. Chương trình con giải bước ngược :



Dưới đây là sơ đồ khối của chương trình giải hệ bằng phương pháp Gauss có chứa thủ tục **ngược**.



3.2.3. Tính định thức

Xét phương trình $Ax = 0$. Dùng phương pháp Gauss ta đưa hệ xuất phát về dạng $Bx = 0$. Ma trận B nhận được từ A bằng cách chia một dòng cho các phần tử dẫn $a_{kk}^{(k-1)}$ và thêm bớt các tổ hợp tuyến tính các dòng chứa phần tử dẫn. Do đó :

$$\det A = a_{11}^{(0)} a_{22}^{(0)} \dots a_{nn}^{(n-1)} \det B$$

Trong đó:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & b_{12}^{(0)} & \dots & b_{1n}^{(0)} \\ 0 & 1 & \dots & b_{2n}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \text{ suy ra } \det B = 1.$$

Như vậy :

$$\det A = a_{11}^{(0)} a_{22}^{(0)} \dots a_{nn}^{(n-1)} \quad (3-12)$$

3.2.4. Tìm ma trận nghịch đảo

Cho A là ma trận không suy biến. Ta cần tìm ma trận nghịch đảo $A^{-1} = (x_{\bar{e}})_{i,j=1}^n$.

Do $AA^{-1} = E$ nên :

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} x_{kj} = \delta_{\bar{e}} \quad (i, j = \overline{1, n}) \quad (3-13)$$

Như vậy để tìm ma trận nghịch đảo A^{-1} , ta phải giải n hệ phương trình đại số tuyến tính với cùng một ma trận A. Ta có thể dùng chung một sơ đồ Gauss.

3.3 PHƯƠNG PHÁP LẬP ĐƠN

3.3.1. Mô tả phương pháp

Phương pháp Gauss thuộc loại *phương pháp đúng*, tức là nếu không có sai số tính toán thì ta sẽ có nghiệm đúng của hệ. Ngoài ra còn một số phương pháp khác, dưới đây ta xét **phương pháp lập đơn** một cách sơ lược.

Xét hệ (3-1) đã viết dưới dạng vectơ (3-4) : $Ax = f$ Ta chuyển hệ này về dạng tương đương có dạng

$$x = Bx + g \quad (3.14)$$

Trong đó ma trận B suy từ A còn vectơ g suy từ f bằng một cách nào đó, giả sử :

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

Sau đó ta xây dựng công thức tính lặp :

$$x^{(m)} = Bx^{(m-1)} + g \quad (3-15)$$

$$x^{(0)} \text{ chọn trước} \quad (3-16)$$

Trong đó

$$(Bx)_i = \sum_{j=1}^n b_{ij} x_j \quad (3-17)$$

Phương pháp tính $x(m)$ theo (3-15), (3-16) gọi là phương pháp lặp đơn. Ma trận B gọi là ma trận lặp.

3.3.2 Điều kiện hội tụ

Định nghĩa 1 : Giả sử $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T$ là nghiệm của hệ (3-14). Nếu $x_i^{(m)} \rightarrow \alpha_i$ khi $m \rightarrow \infty, i = 1, 2, \dots, n$ thì ta nói phương pháp lặp (3-15), (3-16) hội tụ.

Định nghĩa 2 : Cho vectơ $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)^T$ thì mỗi đại lượng sau:

$$\|Z\|_0 = \max\{|Z_i|\} \quad \forall i$$

$$\|Z\|_1 = |Z_1| + |Z_2| + \dots + |Z_n|$$

$$\|Z\|_2 = Z_1^2 + Z_2^2 + \dots + Z_n^2$$

Gọi là độ dài mở rộng của vectơ Z hay còn gọi là **chuẩn của Z** .

Chúng có các tính chất sau đây :

Với $p = 0$ hay 1 hay 2 ta đều có :

$$1) \|Z\|_p \geq 0, \|Z\|_p = 0 \Leftrightarrow Z = \text{vectơ không.}$$

$$2) \|\lambda Z\|_p = |\lambda| \|Z\|_p, \lambda \text{ là một số thực.}$$

$$3) \|u + v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p$$

Hệ quả : Nếu phương pháp lặp (3-15), (3-16) hội tụ thì:

$$\|x^{(m)} - \alpha\|_p \rightarrow 0 \quad \text{khi} \quad m \rightarrow \infty \quad (3-18)$$

và ngược lại nếu có (3-18) thì phương pháp lặp (3-15), (3-16) hội tụ.

Đối với ma trận $B = (b_{ij})$ giả sử ta đặt :

$$r_0 = \max_i \sum_{j=1}^n |b_{ij}|$$

$$r_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |b_{ij}|$$

$$r_2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |b_{ij}|^2$$

Người ta chứng minh được định lý về điều kiện hội tụ của phương pháp lặp đơn:

Định lý 2: Nếu $r_0 < 1$ hoặc $r_1 < 1$ hoặc $r_2 < 1$ (3-19) thì phương pháp lặp (3-15), (3-16) hội tụ với bất kỳ xấp xỉ đầu $x^{(0)}$ nào, đồng thời sai số có đánh giá :

$$\|x^{(m)} - \alpha\|_p \leq \frac{r_p^m}{1 - r_p} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_p \quad (3-20)$$

$$\|x^{(m)} - \alpha\|_p \leq \frac{r_p}{1 - r_p} \|x^{(m)} - x^{(m-1)}\|_p \quad (3-21)$$

Trong đó :

$$p = 0 \text{ nếu } r_0 < 1$$

$$p = 1 \text{ nếu } r_1 < 1$$

$$p = 2 \text{ nếu } r_2 < 1$$

3.3.3 Thí dụ

Giải hệ sau bằng phương pháp lặp đơn :

$$4x_1 + 0,24x_2 - 0,08x_3 = 8$$

$$0,09x_1 + 3x_2 - 0,15x_3 = 9$$

$$0,04x_1 - 0,08x_2 + 4x_3 = 10$$

Giải: Ta đưa hệ về dạng (3-14) sao cho điều kiện hội tụ (3-19) thỏa mãn. Chia vế phải của từng phương trình tương ứng với 4, 3, 4 rồi chuyển vế ta có hệ mới :

$$x_1 = -0,06x_2 + 0,02x_3 + 2$$

$$x_2 = -0,03x_1 + 0,05x_3 + 3$$

$$x_3 = -0,01x_1 + 0,02x_2 + 2,5$$

Lúc này hệ có dạng $x = Bx + g$. Để kiểm tra điều kiện hội tụ ta tính :

$$\sum_{j=1}^3 |b_{1j}| = 0 + 0,06 + 0,02 = 0,08$$

$$\sum_{j=1}^3 |b_{2j}| = 0,03 + 0 + 0,05 = 0,08$$

$$\sum_{j=1}^3 |b_{3j}| = 0,01 + 0,02 + 0 = 0,03$$

Do đó $r_0 = \max \{0,08; 0,08; 0,03\} = 0,08 < 1$. Theo định lý 2 phương pháp lặp đơn trên hội tụ với mọi $x^{(0)}$ chọn trước. Ta chọn $x^{(0)} = (0,0,0)^T$. Kết quả tính toán cho trong bảng :

m	0	1	2	3	4
$x_1^{(m)}$	0	2	1,92	1,9094	1,90923
$x_2^{(m)}$	0	3	3,19	3,1944	3,19495
$x_3^{(m)}$	0	5	2,04	2,0446	2,04485

Để đánh giá sai số ta tính:

$$\begin{aligned} \|x^{(4)} - x^{(3)}\|_0 &= \max \{ |x_i^{(4)} - x_i^{(3)}|, i = 1, 2, 3 \} \\ &= \max \{ 0,00017; 0,00055; 0,00025 \} \end{aligned}$$

$$= 0,00055$$

Áp dụng công thức (3-21) ta có : $\|x^{(4)} - \alpha\|_0 \leq \frac{0,08}{1-0,08} \cdot 0,00055 = 0,0022$

Vậy ta có nghiệm của hệ là :

$$x_1 = 1,90923 \pm 0,0022$$

$$x_2 = 3,19495 \pm 0,0022$$

$$x_3 = 2,04485 \pm 0,0022$$

Hoặc ta quy tròn thành :

$$x_1 = 1,909 \pm 0,003$$

$$x_2 = 3,195 \pm 0,003$$

$$x_3 = 2,045 \pm 0,003$$

3.3.4 Sơ đồ thuật toán

- 1) Cho hệ tuyến tính $Ax = b$.
- 2) Ấn định sai số cho phép ε , với $\varepsilon > 0$.
- 3) Đưa $Ax = b$ về dạng $x = Bx + g$ thỏa mãn điều kiện hội tụ
- 4) Chọn $x^{(0)}$ tùy ý.
- 5) Tính $x^{(m+1)} = Bx^{(m)} + g$; $m = 0, 1, 2, \dots$ cho tới khi $\|x^{(m+1)} - x^{(m)}\|_p < \varepsilon$ thì dừng quá trình tính.
- 6) Kết quả $x^{(m+1)} \approx \alpha$ Với sai số $\|x^{(m+1)} - \alpha\|_p \leq \frac{r_p}{1-r_p} \varepsilon$

BÀI TẬP

Câu 1 : Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss :

$$\begin{cases} 7.24x_1 + 0.93x_2 - 4.65x_3 + 1.29x_4 + 0.13 = 0 \\ -2.61x_1 + 3.12x_2 + 4.97x_3 - 0.78x_4 + 1.56 = 0 \\ 3.18x_1 + 0.84x_2 + 2.88x_3 + 4.13 = 0 \\ 0.92x_1 + 1.38x_2 - 2.54x_4 - 3.69 = 0 \end{cases}$$

Câu 2 : Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp lặp :

$$\begin{cases} 4x_1 + 0.24x_2 - 0.08x_3 + 0.16x_4 - 8 = 0 \\ 0.09x_1 + 3x_2 - 0.15x_3 - 0.12x_4 - 9 = 0 \\ 0.04x_1 - 0.08x_2 + 4x_3 + 0.06x_4 - 20 = 0 \\ 0.02x_1 + 0.06x_2 + 0.04x_3 - 10x_4 + 1 = 0 \end{cases}$$

Sai số không vượt quá 10^{-3} .

Câu 3 : Dùng phương pháp gaoxơ giải hệ :

$$\begin{cases} 3,2 x_1 - 1,5 x_2 + 0,5 x_3 = 0,90 \\ 1,6 x_1 + 2,5 x_2 - 1,0 x_3 = 1,55 \\ 1,0 x_1 - 0,2 x_2 + 0,1x_3 = 0,4 \end{cases}$$

Câu 4 : Dùng phương pháp lặp giải hệ , tính lặp ba lần và cho biết sai số :

$$\begin{cases} 24,21 x_1 + 2,42 x_2 + 3,85 x_3 = 30,24 \\ 2,31 x_1 + 31,49 x_2 + 1,52 x_3 = 40,95 \\ 3,49 x_1 + 4,85 x_2 + 28,72x_3 = 42,81 \end{cases}$$